Esercizi su Jacobiana, differenziabilità, ecc. ecc.

① $f(x,y) = (x+y)(x^2+y^2-1)$; $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

- Studiare il segno di f
- Calcolare gradiente, differenziale, piano tangente e spazio vettoriale tangente al grafico di f in $(1,1)$ e (x_0,y_0)
- Trovare una base per ~~il piano~~ lo spazio vettoriale tangente al grafico in $(1,1)$
- Scrivere la formula di Taylor al primo ordine

Note. In generale se $y = F(x)$ è differenziabile in $x_0 \in \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{A}} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$

$$y = F(x) = F(x - x_0 + x_0) = F(h + x_0)$$
$$= F(x_0) + d_{x_0} f(x - x_0) + o(x - x_0)$$
$$= F(x_0) + Jf(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$
$$= F(x_0) + d_{x_0} f(h) + o(h)$$
$$= F(x_0) + Jf(x_0)h + o(h)$$

Grafico$(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} ; \ y = F(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

è un oggetto n-dimensionale:

$x \longmapsto (x, F(x))$ lo parametrizza

"Piano" tangente al grafico in x_0:

$$y - F(x_0) = Jf(x_0)(x - x_0)$$

Spazio vettoriale tangente in x_0:

$$k = Jf(x_0)h$$

Base: $(e_1, Jf(x_0)e_1), \dots, (e_n, Jf(x_0)e_n)$

Derivate parziali e differenziabilità.

Def. Siano $\mathbb{R}^n \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. F è parzialmente derivabile nella direzione x_j in x_0 se

$$\exists \lim_{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{F(x_0 + h e_j) - F(x_0)}{h} \in \mathbb{R}^m \qquad e_j = (0 \dots \underset{j}{1} \dots 0)$$

Il limite viene chiamato derivata parziale rispetto a x_j in x_0 e si indica con:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) = \partial_{x_j} F(x_0) = \partial_j F(x_0) = D_j f(x_0) = \dots$$

OSS. (1) Sia $F = (F_1, \dots, F_m)$:

$$\exists\, \partial_{x_j} F(x_0) \in \mathbb{R}^m \iff \exists\, \partial_{x_j} F_1(x_0), \dots, \partial_{x_j} F_m(x_0) \in \mathbb{R}$$

e inoltre
$$\partial_{x_j} F(x_0) = \begin{bmatrix} \partial_{x_j} F_1(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_j} F_m(x_0) \end{bmatrix} \text{: vettore colonna}$$

(2) Sia $\varphi(t) = F_\ell(x_0 + t e_j)$

Allora (se valgono le ipotesi nella def.) $\exists\, \varepsilon > 0 : \;]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$

e $\dfrac{\partial F_\ell}{\partial x_j}(x_0) = \dot{\varphi}(0) = \dfrac{d\varphi}{dt}(0)$

Def. Se $\mathbb{R}^n \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ha derivate parziali rispetto a ogni componente $x_1, \dots, x_n$ in $a \in A$, allora

$$\nabla f(a) = (\partial_1 f(a), \dots, \partial_n f(a)) \quad \text{vettore riga}$$

è il gradiente di f in a

Def. Se $\mathbb{R}^n \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ ha derivate parziali rispetto a ogni componente $x_1, \dots, x_n$ in $a \in A$ allora

$$\mathbb{R}^{m \times n} \ni JF(a) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(a) \\ \vdots \\ \nabla F_m(a) \end{bmatrix} = [\partial_1 F(a) | \cdots | \partial_n F(a)]$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(a) & \cdots & \partial_n F_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m(a) & \cdots & \partial_n F_m(a) \end{bmatrix}$$ è la matrice Jacobiana di F in a

Notazioni Se $n=1$, poniamo per

$$\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R} \supseteq A} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^m \quad \text{~~parzialmente~~}$$

derivabile in $a \in A$:

$$\partial_t \gamma(a) = \frac{d\gamma}{dt}(a) = \dot{\gamma}(a) \in \mathbb{R}^m \text{ (colonna)}$$

non si usa mai

Esempi (1) $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4 + xz$$

Derivare parzialmente rispetto a x significa (per definizione) tenere y e z costanti:

$$\partial_x f(x_0,y_0,z_0) = 2x_0 y_0^3 z_0^4 + z_0$$

e

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \cancel{2x_0y_0^3z_0^4, 3x_0^2y_0^2z_0^4}$$

$$= \left(2x_0y_0^3z_0^4 + z_0;\ 3x_0^2y_0^2z_0^4;\ 4x_0^2y_0^3z_0^3 + x_0\right)$$

$\in (\mathbb{R}^3)^t$: riga

(2) $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$

$$F(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z))$$
$$= (xyz;\ x+2y+3z)$$

$$\Rightarrow JF(x,y,z) = \begin{bmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\nabla B(x,y,z) = (1, 2, 3) \in (\mathbb{R}^3)^t$$

eccetera...

(3) $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$ $\quad \gamma(t) = (2\cos(t), 3\sin(t))$

$$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Proposizione. Siano $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{f,g} \mathbb{R}$ parzialmente derivabili rispetto a x_j in $a \in A$. Allora, $\lambda f + \mu g$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), fg e f/g (se $g(a) \neq 0$) lo sono e

- $\partial_j(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \cdot \partial_j f(a) + \mu \cdot \partial_j g(a)$
- $\partial_j(fg)(a) = \partial_j f(a)\, g(a) + f(a)\, \partial_j g(a)$
- $\partial_j(f/g)(a) = \dfrac{\partial_j f(a)\, g(a) - f(a)\, \partial_j g(a)}{g(a)^2}$

Dim. Esercizio facile.

Esempio. È possibile avere derivate parziali ovunque e non avere neanche la continuità.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Allora $\partial_x f(x,y) = \dfrac{y(x^2+y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{x(x^2+y^2) - xy \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

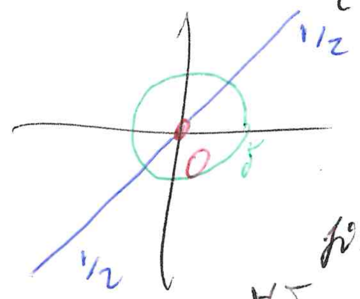
se $x^2+y^2 \neq 0$

Poiché $f(x,0) = 0 = f(y,0)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$\exists\, \partial_x f(0,0) = 0 = \partial_y f(0,0)$.

Quindi f è parzialmente derivabile rispetto a x e y in $\mathbb{R}^2$.

Però, $f(x,x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$



Ciò implica che f non è continua in $(0,0)$: fissato $\varepsilon = 1/4 > 0$:

$\forall \delta > 0$ $\exists (x,y)$:

$\|(x,y)\| \le \delta$, ma $|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{1}{2} \not> \varepsilon$.

La nozione di differenziabilità sostituisca efficacemente quella di derivabilità in più dimensioni.

Def. Siano $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ e $a \in A$. F è differenziabile in a se esiste $\mathbb{R}^n \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$ lineare tale che

$$f(a+h) - f(a) - T(h) = \text{Errore}(h),$$

dove $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}} \frac{\|\text{Errore}(h)\|}{\|h\|} = 0$.

Cioè t.c. $\text{Errore}(h) = \underset{\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}{o(h)}$.

$T = d_a f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è il differenziale di f in a. $d_a f$ è una mappa lineare.

Proposizione. Sia $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ differenziabile in $a \in A$. Allora, F è parzialmente derivabile in a

$$d_a F(h) = J F(a) \cdot h$$

In particolare, la mappa lineare $d_a f$ è univocamente determinata.

Dim. Fissato $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, per definizione di differenziabilità abbiamo:

$$\frac{F(a + t e_j) - F(a)}{t} = \frac{T(t e_j) + \text{Errore}(t e_j)}{t}$$

$$= T(e_j) + \frac{\text{Errore}(t e_j)}{t}$$

Ora, per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$\|h\| \le \delta \Rightarrow \frac{\|\text{Errore}(h)\|}{\|h\|} \le \varepsilon,$$

quindi $|t| \le \delta \Rightarrow \|t e_j\| \le \delta \Rightarrow$

$$\frac{\|\text{errore}(t e_j)\|}{\|t e_j\|} = \frac{\|\text{Errore}(t e_j)\|}{|t|} \le \varepsilon$$

cioè $\displaystyle\lim_{\substack{t \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{\|\text{Errore}(t e_j)\|}{|t|} = 0.$

Quindi $\displaystyle\exists \lim_{\substack{t \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}}} \frac{F(a + t e_j) - F(a)}{t} = T(e_j) \in \mathbb{R}$

cioè, $\exists \frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = T(e_j)$ e anche

$$\langle T(e_j), \varepsilon_\ell \rangle = \langle \partial_j F(a), \varepsilon_\ell \rangle = \partial_j F_\ell(a) \in \mathbb{R}$$

per $\ell = 1, \dots, m$, dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ è la base canonica di $\mathbb{R}^m$.

Dall'algebra lineare sappiamo che

$$T(h) = \begin{bmatrix} \langle T(e_1), \varepsilon_1 \rangle & \cdots & \langle T(e_n), \varepsilon_1 \rangle \\ \langle T(e_1), \varepsilon_2 \rangle & & \vdots \\ \vdots & & \\ \langle T(e_1), \varepsilon_m \rangle & \cdots & \langle T(e_n), \varepsilon_m \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} =$$

è una rappresentazione di T rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 F_1(a) & \cdots & \partial_n F_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 F_m(a) & \cdots & \partial_n F_m(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} = JF(a) \cdot h$$

come si voleva. ∎

Teorema. Sia $\mathbb{R}^n \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ differenziabile in $a \in A$. Allora, F è continua in a.

Dim. Scelto $r > 0$: $B(a, r) \subseteq A$, se $\|h\| < r$ allora $\|F(a + h) - F(a)\| =$

$$= \|JF(a) h + \text{errore}(h)\|$$

$$\le \|JF(a)\| \cdot \|h\| + \|h\| \cdot \frac{\|\text{Errore}(h)\|}{\|h\|}$$

$$\xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ \text{in } \mathbb{R}^n}]{} \|JF(a)\| \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0,$$

quindi F è continua ∎

Proposizione Siano

$$\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{f,\,g} \mathbb{R} \text{ differenziabili}$$

in $a \in A$. Allora

(i) $\lambda f + \mu g$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ è differenziabile in a e $d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda (d_a f) + \mu (d_a g)$

$$\nabla(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \cdot \nabla f(a) + \mu \cdot \nabla g(a)$$

(ii) fg è differenziabile in a e

$$d_a(fg) = d_a(f)\, g(a) + f(a)\, d_a(g)$$

$$\nabla(fg)(a) = \nabla f(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \nabla g(a)$$

(iii) se $f(a) \neq 0$ allora $1/f$ è differenziabile in a e

$$d_a(1/f) = -\frac{d_a(f)}{f(a)^2}$$

$$\nabla(1/f)(a) = -\frac{\nabla f(a)}{f(a)^2}$$

Dim. Esercizio facile.

In (iii) si usa la continuità di f per mostrare che $1/f$ è definita in un aperto.

Teorema (sulla differenziabilità delle composizioni).

Siano $\mathbb{R}^n \supseteq A \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \supseteq B \xrightarrow{G} \mathbb{R}^p$; $F(A) \subseteq B$;

con F differenziabile in a e G in $F(a)$. Allora

(i) $G \circ F$ è differenziabile in a

(ii) $d_a(G \circ F) = (d_{F(a)} G) \circ (d_a F)$

(iii) $J(G \circ F)(a) = JG(F(a)) \cdot JF(a)$

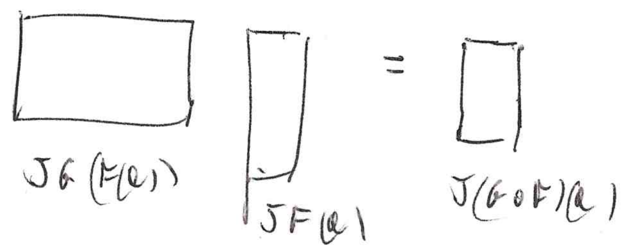
(iv) per $i = 1 \dots n$ e $j = 1 \dots p$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ F)_j(a) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_j}{\partial y_\ell}(F(a)) \frac{\partial F_\ell}{\partial x_i}(a)$$

Oss. (1) (iii) è la traduzione di (ii) da applicazioni lineari a matrici.

(2) Le dimensioni in (ii), (iii):

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d_a F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{d_{F(a)} G} \mathbb{R}^p$$



La (iv) segue da (iii): $J(G \circ F)(a) =$

$$JG(F(a))\, JF(a) = \begin{bmatrix} \nabla G_1(F(a)) \\ \vdots \\ \nabla G_p(F(a)) \end{bmatrix} \left[\partial_{x_1} F(a) \cdots \partial_{x_n} F(a) \right] =$$

$$= \begin{array}{c} \\ j \end{array} \begin{array}{c} \qquad\qquad i \\ \begin{bmatrix} \langle \nabla G_1(F(a)), \partial_{x_1} F(a) \rangle & \cdots & \langle \nabla G_1(F(a)), \partial_{x_n} F(a) \rangle \\ \vdots & \langle \nabla G_j(F(a)), \partial_{x_i} F(a) \rangle & \vdots \\ \langle \nabla G_p(F(a)), \partial_{x_1} F(a) \rangle & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (G \circ F)(a)}{\partial x_i} = \langle \nabla G_j(F(a)), \partial_{x_i} F(a) \rangle =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial G_j}{\partial y_\ell}(F(a)) \frac{\partial F_\ell(a)}{\partial x_i}$$

dim. Usando la definizione di differenziabilità: se $B(a,r) \subseteq A$ e $\|h\| < r$, allora:

$$\cancel{D}(G \circ F)(a+h) - \cancel{D}(G \circ F)(a) = \cancel{D}G(F(a+h)) - \cancel{D}G(F(a))$$

$$= \cancel{D}G(F(a+h) - F(a) + F(a)) - \cancel{D}G(F(a))$$

$$= \cancel{D}G(F(a)+k) - \cancel{D}G(F(a)) \quad \text{dove } k = F(a+h) - F(a),$$

$$= (JG)(F(a))k + \text{Errore}_1(k)$$

$$= JG(F(a)) \cdot \{F(a+h) - F(a)\} + \text{Errore}_1(k)$$

$$= JG(F(a)) \cdot (JF(a)h + \text{Errore}_2(h)) + \text{Errore}_1(k)$$

$$= JG(F(a)) \cdot JF(a)h + \text{Errore}(h), \text{ dove}$$

$\text{Errore}(h) = JG(F(a)) \cdot \text{Errore}_2(h) + \text{Errore}_1(k)$, k come sopra,

e $\dfrac{\text{Errore}_2(h)}{\|h\|} \xrightarrow[\|h\| \to 0]{} 0$ e $\dfrac{\text{Errore}_1(k)}{\|k\|} \xrightarrow[\|k\| \to 0]{} 0$.

Stimiamo i singoli pezzi di errore:

$$\frac{1}{\|h\|} \| JG(F(a)) \cdot \text{Errore}_2(h) \| \le \| JG(F(a)) \| \cdot \frac{\| \text{Errore}_2(h) \|}{\|h\|} \xrightarrow[h \to 0 \text{ in } \mathbb{R}^n]{} 0$$

~~Fisso $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$:~~

~~$\|k\| \le \delta \Rightarrow \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|k\|} < \varepsilon$~~

~~Esiste $\eta > 0$: $\|h\| \le \eta \Rightarrow \|k\| = \|F(a+h) - F(a)\| \le \delta$~~

~~per la continuità~~

$$\frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|h\|} = \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|k\|}{\|h\|} =$$

$$= \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|k\|} \cdot \frac{\|F(a+h) - F(a)\|}{\|h\|}.$$

(suppongo qui che $F(a+h) - F(a) = k \neq 0$, se fosse $= 0$ allora $G(F(a+h)) - G(F(a)) = 0$)

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Trovo $\delta > 0$:

$$\|k\| \leq \delta \Rightarrow \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|k\|} \leq \varepsilon.$$

D'altra parte la continuità di F implica che $\exists \eta_1 > 0$: $\|h\| \leq \eta_1 \Rightarrow \|k\| \leq \delta$, quindi $\|h\| \leq \eta_1 \Rightarrow \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|k\|} \leq \varepsilon$.

Per il secondo fattore, richiamando il conto visto sopra,

$$\frac{\|F(a+h) - F(a)\|}{\|h\|} = \frac{\|JF(a)h + \text{Errore}_2(h)\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|JF(a)\| \cdot \frac{\cancel{\|h\|}}{\|h\|} + \underbrace{\frac{\|\text{Errore}_2(h)\|}{\|h\|}}_{\to 0,\ h \to 0}$$

$$\leq \|JF(a)\| + 1 \quad \text{se } \|h\| \leq \eta_2$$

In conclusione

$$\|h\| \leq \eta_2 \Rightarrow \frac{\|\text{Errore}_1(k)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon \cdot \{\|JF(a)\| + 1\}.$$

$\blacksquare$

Alcuni casi speciali.

- $\underline{n=1}$ $\quad \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^m \xrightarrow{F} \mathbb{R}^p$

$$\frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t) = (JF)(\gamma(t))\, \gamma'(t)$$

- $\underline{p=1}$ $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$\nabla(g \circ F)(x) = \nabla g(F(x))\, JF(x)$$

- $\underline{m=1}$ $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^p$

$$J(\gamma \circ f)(x) = \cancel{\nabla}\, \gamma'(f(x))\, \nabla f(x)$$

Oss. che abbiamo un prodotto colonne × riga (!!):

$${}_{p}\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}^{1} \; {}_{1}\begin{bmatrix} \quad\quad \end{bmatrix}^{n} = {}_{p}\begin{bmatrix} \quad\quad \\ \\ \end{bmatrix}^{n}$$

e che $\frac{\partial (\gamma \circ f)_j}{\partial x_i}(x) = \gamma_j'(f(x)) \cdot \partial_i f(x)$

Gli algebristi chiamano tali prodotti "prodotti tensori".

Esercizio. Mostrare che non esistono $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^2$ differenziabili tali che $\gamma(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$. Sugg. Algebra lineare.

Differenziabilità e piani tangenti

Def. Sia $\mathbb{R}^n \supseteq E \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ una funzione. Il <u>grafico</u> di F è $\text{grafico}(F) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in E \text{ e } y = F(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

- In genere si considera il caso $m=1$: $\text{grafico}(\mathbb{R}^n \supseteq E \xrightarrow{f} \mathbb{R}) = \{(x, f(x)) : x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$
- Se $n=2$, $m=1$, allora $\text{grafico}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$.

Def. Sia $\underset{\text{aperto}}{\mathbb{R}^n \supseteq A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$.

Lo <u>spazio (vettoriale) tangente al grafico di F</u> in $x_0 \in A$ è il grafico del differenziale di F in A e si denota con $T_{(x_0, F(x_0))}\text{grafico}(F)$:

$(h,k) \in \mathbb{R}^{n+m}$: $h \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}^m$ $\quad (h,k) \in T_{(x_0,F(x_0))}\text{grafico}(F) \iff$

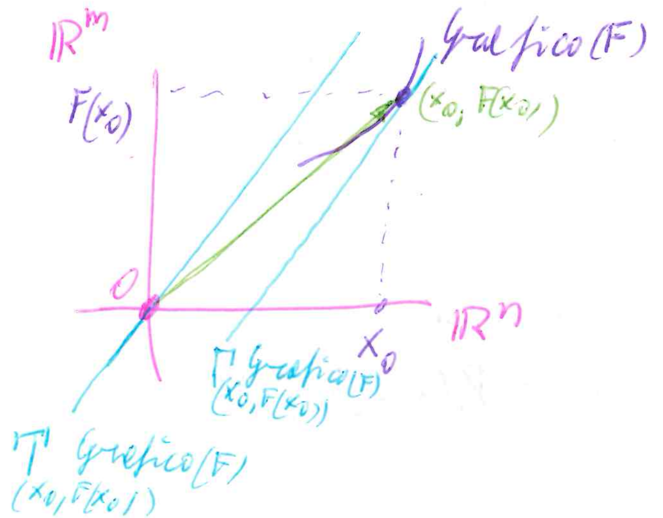
(i) $\boxed{k = d_{x_0}F(h) = JF(x_0) \cdot h}$

Oss. (1) è un'equazione ~~...~~ lineare con $m+n$ incognite e m equazioni scalari. Può essere scritta nella forma:

$$\left[JF(x_0) \mid Id_{\mathbb{R}^m} \right] \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = 0$$

(2) La matrice del sistema ha rango m, quindi $\ker\left(JF(x_0) \mid Id_{\mathbb{R}^m}\right) = T_{(x_0, F(x_0))}\text{grafico}(F)$ ha dimensione $(n+m) - m = n$.

cioè, $T_{(x_0,F(x_0))}\text{grafico}(F)$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.



__Def.__ Sia $\mathbb{R}^n \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{F} \mathbb{R}^m$ differenziabile in $a \in A$.

Lo __spazio affine tangente__ a grafico(F) in $(x_0, F(x_0))$ è

$$\Gamma_{(x_0,F(x_0))} \text{grafico}(F) = T_{(x_0,F(x_0))} \text{grafico}(F) + (x_0, F(x_0))$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m :$$

$$y - F(x_0) = JF(x_0)(x - x_0)$$

$$= d_{x_0}F(x-x_0) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$$

è uno spazio affine di dimensione n, passante per $(x_0, F(x_0))$.

$\boxed{\text{Caso particolare: } n=2 \text{ e } m=1}$

Se $\mathbb{R}^2 \supseteq \underset{\text{aperto}}{A} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è differenziabile in $(x_0,y_0) \in A$, allora

- $f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-y_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \text{Errore}(x-x_0, y-y_0)$

$$= \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0) + \text{Errore}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

ossia

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \text{Errore}(h,k)$$

$$= \partial_x f(x_0,y_0)h + \partial_y f(x_0,y_0)k + \text{Errore}(h,k)$$

con $\dfrac{\text{Errore}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

Posso considerare

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)h + \partial_y f(x_0,y_0)k + \text{Errore}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

come una __formula di Taylor al I ordine__ (per funzioni reali di due variabili).

- __Spazio affine tangente:__

$$z - f(x_0,y_0) = \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$= \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Equazioni dell'incognite (x,y,z).

- __Spazio vettoriale tangente:__

$$z = \partial_x f(x_0,y_0)x + \partial_y f(x_0,y_0)y$$

$$= \nabla f(x_0,y_0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ha più di stesse incognite

Ottengo una __base__ di $T_{(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}$ grafico(f) ponendo $(x,y) = (1,0), (0,1)$:

$u = (1, 0, \partial_x f(x_0,y_0))$; $v = (0, 1, \partial_y f(x_0,y_0))$

__Esercizio.__ Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x^2+y^2-1)\,x = x^3 + xy^2 - x$

Calcolare le equazioni di spazio affine tangente, spazio vettoriale tangente e grafico(f) in $(1,2)$ e una base per lo spazio vettoriale tangente.

__Svolgo.__ $\partial_x f(x,y) = 3x^2+y^2-1$

$\partial_y f(x,y) = 2xy$

$\Rightarrow f(1,2) = 4$

$\partial_x f(1,2) = 6 \qquad \partial_y f(1,2) = 4$

__Taylor:__ $f(x,y) = 4 + 6(x-1) + 4(y-2) + \text{errore}(x-1, y-2)$

t.c. $\dfrac{\text{errore}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

__Piano (affine) tangente:__ $z - 4 = 6(x-1) + 4(y-2)$

__~~Piano~~ Spazio (vettoriale) tangente:__ $z = 6x + 4y$

__Una base:__ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$